13632

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 (New Syllabus)

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
பிரயோக கணிதம் II
Applied Mathematics II

06	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ

අවශ්‍ය තැන්හි දී ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. C ගුවන් යානයක්, l දිගැති AB ධාවන පථයක A කෙළවරට U වේගයෙන් ගොඩබැස, τ කාලයට පසු B හි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණෙයි. බිමේ ප්‍රතිරෝධය හා වාතයේ ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙළින් ගුවන් යානයේ ඒකක ස්කන්ධයට a හා bv^2 වෙයි. මෙහි v යනු ගුවන් යානයේ ප්‍රවේගය ද a, b යනු නියත ද වෙයි. t වේලාවේ දී C ගුවන් යානය A කෙළවරේ සිට x දුරකින් වන විට, ගුවන් යානයේ චලිතයේ සමීකරණය ලියන්න.

   (v, t) සහ (x, v) විචල්‍යවල අවකල සමීකරණ ලබා ගෙන

   (i) $U = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan\left(\sqrt{ab}\, \tau\right)$ බවත් (ii) $l = \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} U^2\right)$ බවත්

   පෙන්වන්න.

2. ස්කන්ධය M ද පාදයක දිග $2a$ ද වූ ඒකාකාර කුහර ඝනකාකාර පෙට්ටියක් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් බට්ටෙක් සහිත $l(<a)$ දිගැති සරල අවලම්බයක් පෙට්ටියේ උඩ මුහුණතේ මධ්‍යලක්ෂ්‍යයේ එල්ලා ඇත. අවලම්බය, උඩ මුහුණතේ ගැටෙන්නේ නැතිව සිරසෙන් දෙපසට ම සෘජුකෝණ සාදමින් දෝලනය වෙයි. අවලම්බය සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය T සොයන්න.
   පිළිවෙළින් ඝර්ෂණ බලය හා පෙට්ටියත් මේසයත් අතර අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව F හා R නම්,

   $\frac{F}{R} = \frac{\sin 2\theta}{\lambda + \cos 2\theta}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\lambda = 1 + \frac{2M}{3m}$

   μ යනු මේසයත් පෙට්ටියත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය විට $\mu \geq \frac{3m}{2\sqrt{M(M+3m)}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

3. t වේලාවේ දී Oxy තලයේ වූ P අංශුවක ධ්‍රැවක කණ්ඩාංක (r, θ) යැයි සිතමු. $\overrightarrow{OP}$ ඔස්සේ ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_r$ යැයි ද θ වැඩි වන දිශාවට $\mathbf{i}_r$ ට ලම්බ ඒකක දෛශිකය $\mathbf{i}_\theta$ යැයි ද සිතමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

   (i) $\dot{\mathbf{i}}_r = \dot{\theta}\, \mathbf{i}_\theta$ බවත් (ii) $\dot{\mathbf{i}}_\theta = -\dot{\theta}\, \mathbf{i}_r$ බවත්

   සාධනය කරන්න. t වේලාවේ දී P ගේ $\mathbf{V}$ ප්‍රවේගය $\mathbf{V} = \dot{r}\mathbf{i}_r + \left(r\dot{\theta}\right)\mathbf{i}_\theta$

   මගින් ලැබෙන බව අපෝහනය කර $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ සොයන්න.

   ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකින් m ස්කන්ධයක් දරා සිටියි. එහි අනෙක් කෙළවර සුමට විශාල තිරස් මේසයක O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇද ඇත. ආරම්භයේ දී අංශුව මේසය මත නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ තන්තුව සෘජුව හා නොඇදී තිබෙන පරිදි ය. දික්කළ තන්තුවට α කෝණයකින් ආනත දිශාවකට $\sqrt{gl}$ ආරම්භක වේගයක් ඇති ව අංශුවේ චලිතය පටන් ගනියි. ඉන් හටගන්නා චලිතයේ දී තන්තුවේ r_0 උපරිම දිග

   $$\left(\frac{r_0}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{r_0}{l}\right)^3 + f(\alpha) = 0$$

   සමීකරණය සපුරාලයි නම්, $f(\alpha)$ සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. ස්වභාවික දිග l ද මාපාංකය λ ද වූ යුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක්, $l+x$ දිගකට අදිනු ලැබූ විට, එම තන්තුවේ විභව ශක්තිය $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{l}x^2$ බව පෙන්වන්න.

අංශු පද්ධතියක් සඳහා රේඛීය ගම්‍යතා මූලධර්මයත් ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මයත් ප්‍රකාශ කරන්න.

පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ A හා B අංශු දෙකක් ස්වභාවික දිග a ද මාපාංකය λ ද වූ යුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් ඈඳ, a දුරක පරතරයක් ඇති ව සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. A අංශුව u ප්‍රවේගයෙන් $\overrightarrow{BA}$ ඔස්සේ මේසය දිගේ ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබයි. චලිතය සඳහා ගම්‍යතා හා ශක්ති සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, තන්තුවේ උපරිම දිග සොයා, තන්තුවේ දිග යළිත් a වන විට A හා B අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\frac{u}{3}$ හා $\frac{2u}{3}$ බව පෙන්වන්න.

5. $\mathbf{I}$ ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය $\mathbf{u}$ සිට $\mathbf{v}$ තෙක් වෙනස් වෙයි නම්, අංශුවේ චාලක ශක්ති වෙනස $\frac{1}{2}\mathbf{I}.(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ යන්නෙන් ලැබෙන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක් a දිගින් යුත් සමාන යුහු අවිතන්‍ය තන්තු හතරක් මගින් ඈඳූ එක එකක් m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශු හතරක්, තන්තුවලින් සෑදුනු පාද සහිත $ABCD$ රොම්බසයක කොන්වල පිහිටා සුමට තිරස් මේසයක් මත තිබෙයි. $\overrightarrow{CA}$ විකර්ණය දිගේ $\mathbf{I}$ බාහිර ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. C හි අංශුව $\frac{|\mathbf{I}|}{4m}\cos 2\alpha$ ආරම්භක වේගයෙන් චලනය වන බව සාධනය කරන්න. මෙහි $B\hat{A}D = 2\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$

පද්ධතියට ලැබෙන චාලක ශක්තිය, $|\mathbf{I}|$, m හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. ස්කන්ධය M වූ A සුමට ගෝලයක්, නිශ්චලතාවේ තිබෙන m ස්කන්ධයෙන් යුත් තවත් B සුමට ගෝලයක ගැටෙන්නේ, ගැටෙන වේලාවේ දී කේන්ද්‍ර රේඛාව සමග $\theta\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන දිශාවකිනි. A ගෝලයේ පෙත ϕ කෝණයකින් උත්ක්‍රම වෙයි නම්

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{(M + m)\tan\theta}{(M - em)}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි e යනු ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta \neq 0,\ M = em$ විට ද

(ii) $\theta = 0,\ M > em$ විට ද

(iii) $\theta = 0,\ M < em$ විට ද

(iv) $\theta = 0,\ M = em$ විට ද

A ගෝලයේ චලිතයේ දිශාව දක්වන්න.

7. ගැණිය හැකි අගය බොහෝ ගණනක් ගත හැකි X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක $E(X)$ ගණිත අපේක්ෂාව හා σ_X සම්මත අපගමනය අර්ථ දක්වන්න.

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

බව පෙන්වන්න.

(අ) T නොනැඹුරු දාදු කැටයක් වරක් උඩ දැමීමේ දී උඩට පෙරළෙන සංඛ්‍යාවල සම්මත අපගමනය සොයන්න. T යොදා ගෙන ක්‍රීඩාවක යෙදුනි; එහි දී 2 උඩට පෙරලුනොත් ක්‍රීඩකයා රුපියල් 40 ක් දිනයි; 4 උඩට පෙරලුනොත් රුපියල් 80 ක් දිනයි; 6 උඩට පෙරලුනොත් රුපියල් 60 ක් පරදු වෙයි; වෙනත් ඕනෑම මුහුණතක් උඩට පෙරලුනොත් ඔහු දිනන්නේ වත් පරදින්නේ වත් නැත. යහ ක්‍රීඩාවක දී, ක්‍රීඩාවේ යෙදීමට ක්‍රීඩකයෙකු ගෙවිය යුතු යැයි අපේක්ෂා කරන අවම මුදල කීය ද?

(ආ) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යය, සම්භාවිතාව

$$P(X = x) = k\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

සහිත ව සියලු ම ධන නිඛිල අගයයන් උපකල්පනය කරයි. මෙහි k යනු ධන නියතයකි. $E(X)$ සොයා $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

8. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍ය අපගමනය අර්ථ දක්වන්න.
k යනු ධන නියතයක් විට, X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{81}\, x(9 - x^2); & 0 \le x \le 3 \text{ නම්,} \\ 0; & \text{අන් අවස්ථාවල දී,} \end{cases}$$

යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි. $k = 4$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ව්‍යාප්තියේ පහත සඳහන් එක එකක් ආගණනය කරන්න:

(i) මාතය;
(ii) මධ්‍යස්ථය;
(iii) මධ්‍යන්‍යය;
(iv) මධ්‍යන්‍ය අපගමනය

ඉහත ආගණනවල දී ඔබ යොදා ගන්නා සියලු ම පියවර සනාථ කරන්න.

9. (අ) X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යය $\mathbb{R}$ හි $[a, b]$ සංවෘත ප්‍රාන්තරය පුරා ඒකාකාර ලෙස ව්‍යාප්ත වී තිබෙයි. X ගේ $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයත් $F(x)$ ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතයත් සොයා ඒවායේ ප්‍රස්තාරවල දළ රූප සටහන්, $\mathbb{R}^2 \equiv Oxy$ තලය මත අඳින්න. X ගේ μ මධ්‍යන්‍ය ද σ^2 විචලතාවය ද සොයන්න.

(ආ) වාර්ෂික පරීක්ෂණයක ලකුණු, μ මධ්‍යන්‍යයකුත් σ සම්මත අපගමනයකුත් සහිත ව ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී තිබෙයි. අයදුම්කරුවන් ගෙන් 10% කට ලකුණු 70 ට වැඩි බවත්, 20% කට ලකුණු 40 ට අඩු බවත් සොයා ගෙන ඇත. $\mu \approx 52$ බව පෙන්වා, දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව σ සොයන්න.
(ලකුණු, ආසන්නතම නිඛිලයට සන්නිකර්ෂණය කර ඇති බව උපකල්පනය කරන්න.)

10. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක, තැටියේ තලයට ලම්බ එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}ma^2$ බව පෙන්වන්න.

තලය සිරස් ව සිටින, m ස්කන්ධයෙන් හා a අරයෙන් යුත් ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක්, a ට වැඩි උසින් යුත් සිහින් අචල සිරස් කණුවක මුදුන මත නිශ්චලව තබා ඇත. පසුව එය නිශ්චලතාවයෙන්, සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. සිරස සමග P ස්පර්ශ ලක්ෂයේ දී අරය සාදන කෝණය $\theta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ද P ලක්ෂයේ දී අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R ද ඝර්ෂණ බලය F ද නම්,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{3a}\left(1-\cos\theta\right)$$

බව පෙන්වන්න. θ හි ශ්‍රිත ලෙස F හා R සොයන්න.

$\mu\ (<\infty)$ ඝර්ෂණ සංගුණකය කොතරම් විශාල වුවද θ කෝණය $\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$ අගයට එළඹීමට පෙර තැටිය නිශ්චිත වශයෙන් ම ලිස්සන බව අපෝහනය කරන්න.

11. ආරම්භක මුළු ස්කන්ධය M වූ රොකට්ටුවක්, නිශ්චලතාවේ සිට ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ලෙස උඩු අතට දියත් කරන ලදී. රොකට්ටුව, $k(>0)$ නියත ශීඝ්‍රතාවයකින් ඉන්ධන දවා-ලන අතර දහන පදර්ථ, රොකට්ටුවට සාපේක්ෂව u_0 වේගයකින් සිරස් ලෙස පහළට පිට කෙරෙයි. හිස් කබොලේ ස්කන්ධය $M_0\ (<M)$ ය. t වේලාවේ දී, රොකට්ටුවේ ස්කන්ධය m වන අතර එය V ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස උඩු අතට චලනය වෙමින් තිබෙයි. චලිතයට වාතයේ ප්‍රතිරෝධයක් **නොමැති** බව උපකල්පනය කරමින්, $\frac{M-M_0}{k}\geq t\geq 0$ විට,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{u_0}{m}k - g$$

බව ප්‍රමූලධර්ම මගින් සාධනය කරන්න.
රොකට්ටුවේ උපරිම වේගය සොයන්න. එයට ළඟා විය හැකි වැඩි ම උස

$$\frac{u_0^2}{2g}\left[\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)\right]^2 + \frac{u_0 M}{k}\left[1-\frac{M_0}{M}-\ln\left(\frac{M}{M_0}\right)\right]$$

බව පෙන්වන්න.

12. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ කාටීසිය අක්ෂ දිගේ වූ ඒකක දෛශික විට, $Oxyz$ ත්‍රිමාන අවකාශයේ (x, y, z) ලක්ෂයේ දී ක්‍රියාකරන බලයක් $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i}+R_y\mathbf{j}+R_z\mathbf{k}$ යැයි සිතමු. O මූල ලක්ෂය වටා $\mathbf{R}$ හි දෛශික ඝූර්ණය $L_0\mathbf{i}+M_0\mathbf{j}+N_0\mathbf{k}$ ද $P\equiv(a, b, c)$ ලක්ෂය වටා $\mathbf{R}$ හි ඝූර්ණය $L\mathbf{i}+M\mathbf{j}+N\mathbf{k}$ ද වෙයි නම්

$$L = L_0 - bR_z + cR_y,$$

$$M = M_0 - cR_x + aR_z,$$

$N = N_0 - aR_y + bR_x$ බව ද

$L_0R_x + M_0R_y + N_0R_z = LR_x + MR_y + NR_z$ බව ද සාධනය කරන්න.

පද්ධතියක් පිළිවෙළින් (1, 1, 0) හා (0, 1, -2) ලක්ෂවල දී, ක්‍රියා කරන $\mathbf{F}_1 = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ හා $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ බල දෙකකින් සමන්විත වෙයි. එම පද්ධතිය, O හි දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{R}_0 = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ තනි බලයකට හා $\mathbf{G}_0 = L_0\mathbf{i}+M_0\mathbf{j}+N_0\mathbf{k}$ යුග්මයකට ඌනනය වෙයි නම්, l, m, n, L_0, M_0 හා N_0 යන මේවායේ අගයයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, පද්ධතිය තනි බලයකට හෝ තනි යුග්මයකට හෝ ඌනනය කළ නොහැකි බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{G}'$ යනු P ලක්ෂය වටා $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ බලවල ඝූර්ණය නම් ද $\mathbf{G}' = p\mathbf{R}_0$ නම් ද p හි අගයත් P ලක්ෂයේ පථයත් සොයන්න.